EXERCICE N°1 : | **PRINCIPALE** | **50'** | **6,5 points**

1°) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$h(x)=x-1+x\ln x$$

x	0		e^{-2}		$+\infty$
h	‖	-1	↘	$-(1+e^{-2})$	↗ $+\infty$

a) Calculer $h(1)$.

b) Déterminer le signe de la fonction h sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

2°) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+(x-1)\ln x$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

3°) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4°) a) Résoudre dans $]0,+\infty[$, l'équation $f(x)=x$.

b) Montrer que $f(x)\le x$ si et seulement si $x\in[1,e]$.

c) Déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\Delta: y=x$.

5°) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

6°) Soit $\mathcal{A}$ l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

a) Par une intégration par partie montrer que $\int_1^e (x\ln x)dx=\dfrac{1}{4}e^2+\dfrac{1}{4}$.

b) Calculer alors $\mathcal{A}$.

7°) On considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases}u_0=2\\ u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$, $u_n\in[1,e]$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE N°2 : CONTROLE 35' 4,5 points

1°) On considère la fonction f définie sur $[0,2]$ par : $f(x)=\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$.

a) Vérifier que pour $x\in[0,2]$, $f'(x)=\frac{3}{4}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}}$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,2]$, $x\le\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$.

c) En déduire que pour tout $x\in[0,2]$, $0\le f'(x)\le\frac{3}{4}$.

d) Montrer que pour tout $x\in[0,2]$, $0\le 2-f(x)\le\frac{3}{4}(2-x)$.

2°) Soit (u_n) la suite réelle définie sur IN par : $\begin{cases}u_0=1\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN$, $0<u_n<2$.

b) Montrer que pour tout $n\in IN$, $0\le 2-u_{n+1}\le\frac{3}{4}(2-u_n)$.

c) Montrer que pour tout $n\in IN$, $0\le 2-u_{n+1}\le\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

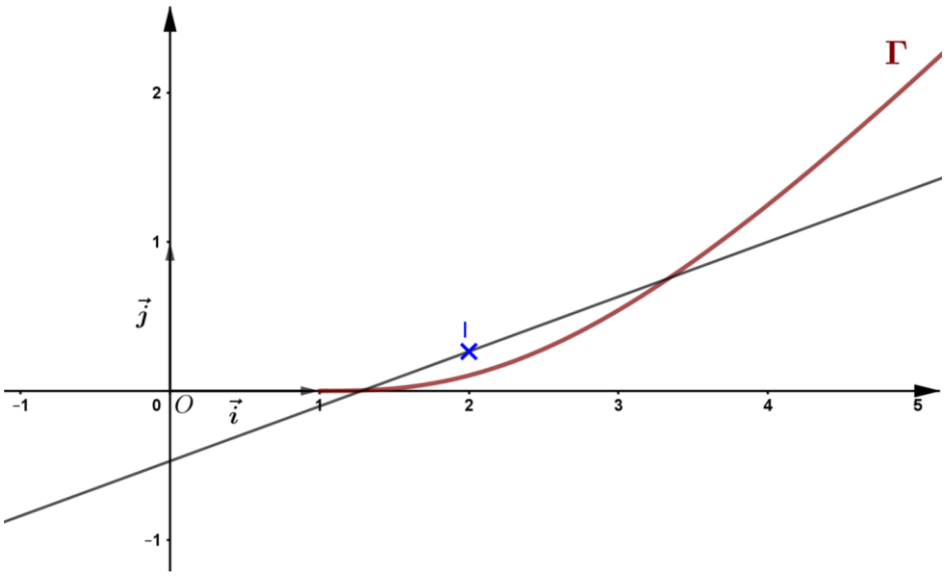
d) Calculer alors la limite de la suite (u_n).

3°) On considère la suite (S_n) définie sur IN^* par $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_{n+1}$.

Montrer que pour tout $n\in IN^*$; $2n-4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\le S_n\le 2n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}$.

EXERCICE N°3 : CONTROLE 50' 6,5 points

Dans la figure ci-dessous, on a construit dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative (Γ) de la fonction h définie sur $[1,+\infty[$ par : $h(x)=x-3+(x+1)e^{1-x}$ et la droite D d'équation $y=\frac{1}{e}x+1-\frac{4}{e}$ et on a placé aussi le point $I(2;1-2e^{-1})$.



Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=1-xe^{1-x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que la droite $\Delta: y=1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

2°) a) Montrer que pour tout $x\in IR$, $f'(x)=(x-1)e^{1-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3°) a) Etudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ.

b) Montrer que la droite D est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point I.

c) Montrer que I est un point d'inflexion pour la courbe $\mathscr{C}$.

d) Tracer, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

4°) Pour tout $\alpha>1$, on considère $\mathcal{A}_\alpha$ l'aire en (u.a) de la partie $\mathcal{P}_\alpha$ du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

a) Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=1-e^{1-x}-f'(x)$.

b) Montrer que $\mathcal{A}_\alpha=h(\alpha)$.

c) Placer sur l'axe $(O,\vec{i})$ le réel α_0 pour lequel $\mathcal{A}_{\alpha_0}=1$.

d) Hachurer la partie $\mathcal{P}_{\alpha_0}$.